

文章编号: 1000-7598-(2006) 增-0055-06

渗透破坏若干问题的解析解及机理分析

周 健, 姚志雄, 江建洪

(同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092)

摘 要: 讨论了柱坐标下不同介质有限区域内用分离变量法求解 Laplace 方程的问题。通过一系列计算试验, 给出了柱坐标下 Laplace 方程在不同介质有限区域内用分离变量方法求的解, 并用该解对渗透破坏现象进行了讨论和实例验证。认为渗透系数分布不均匀是发生渗透破坏的根本原因, 渗透破坏朝着渗透系数差异较大的方向发展, 并对管涌的复杂机理进行了引申阐述。该工作对于流土、管涌机理的更深入研究具有重要的意义。

关 键 词: Laplace 方程; 分离变量法; 柱坐标; 渗透破坏; 管涌; 流土

中图分类号: TB 115 **文献标识码:** A

Analytical solutions and mechanism analysis of seepage failure

ZHOU Jian, YAO Zhi-xiong, JIANG Jian-hong

(Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The solution of Laplace equations by using the method of separation of variables in the cylindrical coordinate system is discussed. Through a series of case studies, the solution of Laplace equations is gotten and used to study the phenomenon of seepage failure and exemplify some instances. It concludes that the ununiformity of the permeability coefficients is the main reason for the seepage failure; and the seepage failure always develops along the direction of high gradient of the permeability coefficients. The authors also try to probe into the complicated mechanism of piping. This study is of great significance to some engineering problems, such as piping, flowsoil, etc.

Key words: Laplace equation; method of separation of variables; cylindrical coordinate system; seepage failure, piping; flow soil

1 前 言

按照渗透水流所引起的局部破坏特征, 渗透破坏可分为流土和管涌两种型式。关于流土的理论相对成熟些, 而管涌的机理要复杂得多。鉴于渗透破坏机理的复杂性和随机性, 到目前为止, 对其形成机理的理论研究仍在继续探索中, 特别是管涌的理论分析远不成熟, 这方面的研究具有重大意义。近来对渗透破坏的模拟分析, 最有代表性的是采用差分法、有限元等数值方法^[1,4], 这些工作的不足之处在于模拟渗流的范围内, 将渗流与土割裂开来, 不能考虑土体和渗流的相互作用。由于管涌发生具有较大的不确定性, 学者们^[5,9]也从概率统计等不同角度进行研究, 这些模型的特点是宏观描述管涌发

生的某一种因素和过程, 比较粗略。关于渗透破坏的解析分析相对较少, 最著名的是 Sellmeijer 等^[10] (1992 年) 的工作, 他们对坝底接触冲刷这种形式提出了比较完整的数学模型, 得到当坝底渗透通道发展到坝底一半长时坝基破坏的情况, 不足之处是推导过程较复杂, 模型参数较难确定。

对于简单形状均匀介质中用 Laplace 方程描述的物理问题, 分离变量法可以得较好的结果, 但是对于介质参数不同的多个区域共同组成的总区内用 Laplace 方程描述的物理问题, 却鲜有学者用分离变量法求解。笔者进行了一系列计算试验, 首次用分离变量方法求解不同介质有限区域内某一类边界条件的柱坐标下的 Laplace 方程, 并给出一些问题的地解。这些解可以用来讨论管涌、流土等现象。

收稿日期: 2006-07-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.50379037)。

作者简介: 周健, 男, 1957 年生, 教授, 博士生导师, 同济大学地基基础工程研究所所长, 从事环境岩土工程和数值计算方面的教学和研究工作。

2 问题的提出

一般边界条件: 圆柱形区域内有 N 层土, 第 i 层土渗透系数为 k_i 、厚度为 h_i 、底面的 z 坐标为 L_i , $i=1, 2, \dots, N-1$ 。第 N 层底面的 z 坐标为 H , 其中 u 表示圆筒区域内的水头。

上底面边界条件为

$$k_a \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_a u = f_a(\rho), \quad (z=0) \quad (1)$$

下底面边界条件为

$$k_b \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_b u = f_b(\rho), \quad (z=H) \quad (2)$$

侧面边界条件为

$$k \frac{\partial u}{\partial \rho} + \alpha u = g(z), \quad (\rho=R) \quad (3)$$

如图 1 所示。

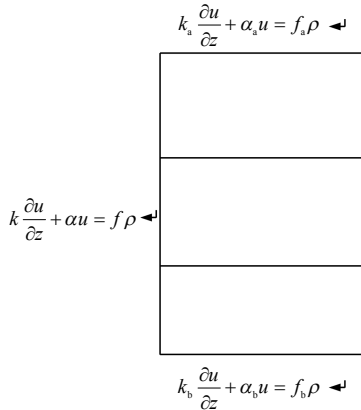


图 1 圆柱形域内竖向分层土的水头分布问题
Fig.1 Problem of water pressure distribution of vertical layered soil in cylindrical fields

这里先来考虑简单边界条件下的整个区域内水头分布解答。上下底面是一类边界条件, 侧面是二类边界条件, 即令式 (1) 中 $k_a=0$; $\alpha_a \neq 0$; 式 (2) 中 $k_b=0$; $\alpha_b \neq 0$; 式 (3) 中 $k_a \neq 0$; $\alpha=0$ 。即

上底面边界条件:

$$u = f_1(\rho) \quad (4)$$

下底面边界条件:

$$u = f_2(\rho) \quad (5)$$

侧面边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = g(z) \quad (6)$$

水头分布的解答用到了函数空间理论, 特别是无限维函数空间中 Sturm-Liouville 型方程的本征值理论; 还涉及了偏微分方程的分离变量法。

2.1 侧面梯度 $g(z)=0$

此时问题转化为半径为 R , 高为 H 的圆筒内均质土上下底面的水头分布分别为 $f_1(\rho)$ 和 $f_2(\rho)$, 侧面不透水, 求圆筒内整个区域的水头分布。描述此问题的方程组如下:

$$\nabla^2 u(\rho, z) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = 0 \quad (8)$$

$$u|_{z=0} = f_1(\rho), u|_{z=H} = f_2(\rho) \quad (9)$$

为了表示一般的情况, 这里取坐标原点在顶面中心上方 L 处, z 向下为正, ρ 由中心向外为正。设 $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$, 代入式 (7) 得

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0 \quad (10)$$

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \lambda R(\rho) = 0 \quad (11)$$

由于侧面是齐次边界条件, 可知式 (11) 构成本征值问题, $\lambda \geq 0$ 。当 $\lambda=0$ 时, $u(\rho, z) = A_0 + B_0 z$; 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda_n = \alpha_n^2$ 。方程解的特征结构 $\{J_0(\alpha_n \rho)\}_{\alpha_n^2}$, $\{e^{\alpha_n z}, e^{-\alpha_n z}\}_{\alpha_n}$, 由侧面边界条件式 (8) 可得:

$$u(\rho, z) = A_0 + B_0 z + J_0(\alpha_n \rho)(A_n e^{\alpha_n z} + B_n e^{-\alpha_n z}) \quad (12)$$

由底面边界条件 (9) 可得:

$$\left. \begin{aligned} A_0 + B_0 L + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\alpha_n \rho)(D_n e^{\alpha_n L} + E_n e^{-\alpha_n L}) &= f_1(\rho) \\ A_0 + B_0 H + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\alpha_n \rho)(D_n e^{\alpha_n H} + E_n e^{-\alpha_n H}) &= f_2(\rho) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

对各式分别按正交基 $\{1\}$, $\{J_0(\alpha_n \rho)\}$ 关于 ρ 积分, 得:

$$A_0 + B_0 L = \frac{\int_0^R f_1(\rho) \rho d\rho}{\int_0^R \rho d\rho} \quad (14)$$

$$A_0 + B_0 H = \frac{\int_0^R f_2(\rho) \rho d\rho}{\int_0^R \rho d\rho} \quad (15)$$

$$A_n e^{\alpha_n L} + B_n e^{-\alpha_n L} = \frac{\int_0^R f_1(\rho) J_0(\alpha_n \rho) \rho d\rho}{\int_0^R J_0^2(\alpha_n \rho) \rho d\rho} \quad (16)$$

$$A_n e^{\alpha_n H} + B_n e^{-\alpha_n H} = \frac{\int_0^R f_2(\rho) J_0(\alpha_n \rho) \rho d\rho}{\int_0^R J_0^2(\alpha_n \rho) \rho d\rho} \quad (17)$$

由此计算可得系数 A_0 、 A_n 、 B_0 、 B_n , 从而由 (12) 式计算 $u(\rho, z)$ 。同理可以推广至 N 层的情况, 假设第 i 层底部的 z 坐标为 L_i , ($i=1, 2$,

$\dots, N-1)$, 第 N 层底部的 z 坐标为 H , 则第 i 层的水头函数为

$$u_i(\rho, z) = A_{i0} + B_{i0}z + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\alpha_n \rho) (A_{in} e^{\alpha_n z} + B_{in} e^{-\alpha_n z}),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N) \quad (18)$$

2.2 侧面梯度 $g(z) \neq 0$

此时, 除了侧面齐次边界条件, 底面非齐次边界条件解:

$$w_i(\rho, z) = A_{i0} + B_{i0}z + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\alpha_n \rho) (A_{in} e^{\alpha_n z} + B_{in} e^{-\alpha_n z}),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N) \quad (19)$$

还要加上底面齐次边界条件, 侧面非齐次边界条件解:

$$v_i(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{in} I_0 \left(\frac{n\pi}{h_i} \rho \right) \sin \left(\frac{n\pi(z - I_{i-1})}{h_i} \right),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N) \quad (20)$$

合并两部分解后得到:

$$u_i(\rho, z) = A_{i0} + B_{i0}z + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\alpha_n \rho) (A_{in} e^{\alpha_n z} + B_{in} e^{-\alpha_n z}) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{in} I_0 \left(\frac{n\pi}{h_i} \rho \right) \sin \left[\frac{n\pi(z - L_{i-1})}{h_i} \right] \quad (21)$$

对于系数 A_{i0} 、 B_{i0} 、 A_{in} 、 B_{in} 、 C_{in} , 可通过上下底面边界条件、中间交界面处过渡条件和侧面边界来求解, 限于篇幅, 此处不详细推导。

3 解在渗透破坏中的应用实例

为简化分析, 本文仅将土分为管涌型土和流土型土。对于如何判断流土型土和管涌型土, 可参考文献[11], 这里不作讨论。下面讨论用这些解进行渗透破坏分析的思路: 先求得水头分布 h , 再求得水力梯度 i , 然后对流土型区域和管涌型土区域分别讨论, 讨论主要集中在竖直方向。本文编制了相应的水头计算程序, 可输入参数进行计算。

先定义一个破坏系数对讨论问题是方便的。破坏系数定义为渗透破坏力与抗渗透破坏力之比。对于流土型土, 分析一小块土体 V 。作用于其上的渗透力 $F_s = i\gamma_w V$, 假设抗渗透破坏力仅为土体的有效重力, 即 $F_r = \gamma' V$, 则破坏系数:

$$K_f = \frac{F_s}{F_r} = \frac{i\gamma_w V}{\gamma' V} = \frac{i\gamma_w}{\gamma'} = \frac{i}{(G_s - 1)(1 - n)} \quad (22)$$

式中: γ_w 为水的重度; γ' 为土的有效重度; G_s 为土粒比重; n 为土的孔隙率。对于管涌型土, 分析土体骨架中的可动颗粒。假设可动颗粒为球形, 半径为 r 。Darcy 定律假设水流是低雷诺数的, 与之匹配, 此处可假设作用于可动颗粒上的渗透力为适用于低雷诺数 Stokes 解答, 即 $F_s = 6\pi\mu r v_0$, 其中 μ 为水的动力黏度系数; v_0 为真实流速。又 $v_0 = v/n$, v 为平均流速; 于是 $F_s = 6\pi\mu r v/n$ 。假设抗渗透破坏力仅为可动颗粒的有效重力, 即 $F_r = 4\pi r^3 \gamma'/3$ 。由此可得管涌型土的破坏系数:

$$K_f = \frac{F_s}{F_r} = \frac{6\pi\mu r v/n}{\frac{4}{3}\pi r^3 \gamma'} = \frac{9\mu v}{2n\gamma' r^2} = \frac{9\mu K_i}{2n\gamma' r^2} \quad (23)$$

据此, 可以绘出土的渗透破坏系数等值线图, 然后判断发生渗透破坏的区域。当 $K_f > 1$ 的区域认为可能发生渗透破坏; K_f 值越大越易发生破坏。

3.1 Kalin 渗透破坏试验与本文方法对比

Kalin (1976 年) [12] 采用了两种砂土, 其物理特性见表 1。通过混合这两种砂土可以得到一系列渗透系数不同的砂土。将渗透系数不同的砂土分 3 层置于内径为 76.2 mm 的圆筒内, 其中第 2 层土的渗透系数较小, 第 1 层和第 3 层的渗透系数相等。水流自下而上, 分级缓慢提高水头, 直至试样发生渗透破坏。圆筒上下装有测压管, 间距为 101.06 mm。限于篇幅, 此处仅列出了部分典型的试验结果 (表 2)。 d_i 为第 i 层土厚 ($i = 1, 2, 3$); $\bar{k}$ 为上下测压管间土的平均渗透系数; i_f 为渗透破坏时上下测压管间土的平均水力梯度, χ 表示第 1 层土 (或第 3 层土) 渗透系数与第 2 层土渗透系数之比, Δh 表示整个土体上下边界的水头差, 它是根据上下测压管读数推算的。

本文对破坏时的水头分布进行了计算。由于问题的对称性, 这里只给出了一半剖面解。如图 2 表示试验 1, 当 $\chi = 2$ 情况下的水头分布图, 其水力梯度的数值分布可见图 4, 破坏系数 K_f 的分布见图 5。这里的砂土均是流土型土, 计算 K_f 时, 用公式 (15), 近似取 $G_s = 2.6$, $n = 0.4$ 。可以明显看到, 渗透破坏发生在第 2 层土中 (在 z 方向即高度方向 130 mm 左右, 与 Kalin 试验结果一致)。如假设整个土体都是均匀的, 取平均渗透系数 $\bar{k} = 1.06$ mm/s, 那么水头分布如图 3 所示, 相应的平均破坏系数 $K_f = 1.78$, 小于按不均匀土层计算得

到的最大破坏系数 3.10 (见图 5 所示)。对于其他试验有类似结果, 这里不再详细列出。由此可看到, 按土层均匀假设来计算临界水力梯度, 在工程上是偏于不安全的。这与工程设计和计算的精神是相违背的, 工程中要求设计和计算偏于安全的方面考虑。概括的讲, 不均匀土渗透破坏的临界水力梯度小于按平均渗透系数计算的临界水力梯度。这一结论与 Kalin (1976 年) 相同。Kalin 文章并不区分管涌与流土, 因此, 这里没有严格区分。若要细究, 此处讨论的内容称为流土更为妥当。

表 1 Kalin (1976 年) 沙土的物理性质
Table 1 Properties of soil Kalin (1976)

颗粒大小	沙土 1	沙土 2
最小直径 /mm	0.075	0.075
最大直径 /mm	1.180	0.600
平均直径 /mm	0.682	0.334
标准方差 /lgdr	0.182	0.087
不均匀系数	2.300	1.400
土粒比重	2.637	2.598
渗透系数 /mm · s ⁻¹	2.0 (n = 33 %)	0.56 (n = 33 %)
	2.7 (n = 48 %)	1.2 (n = 33 %)

表 2 Kalin (1976 年) 渗透破坏试验的部分典型结果
Table 2 Typical results of seepage tests by Kalin (1976)

试验号	d_1 /mm	d_2 /mm	d_3 /mm	k /mm·s ⁻¹	i_f	χ	Δh /mm	破坏位置
1	115	15	20	1.06	1.71	2	245.85	土层 2
						3	237.63	土层 2
						4	231.10	土层 2
2	60	50	40	0.58	1.29	2	172.91	土层 2
						3	162.53	土层 2
						5	152.10	土层 2
3	30	15	95	1.06	0.93	2	125.61	土层 2
						3	122.06	土层 2

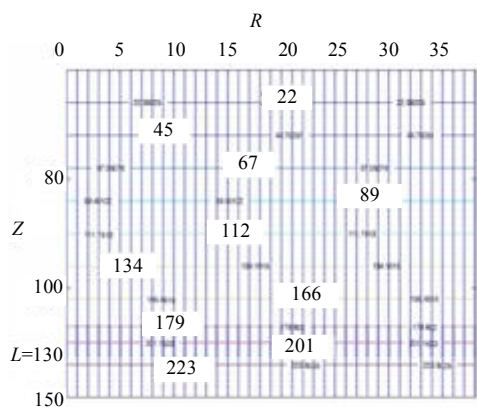


图 2 试验 1 当 $\chi = 2$ 时的水头分布

Fig.2 Water head distribution as $\chi = 2$ in test 1

需特别指出的是上述结论, 不均匀土渗透破坏

的临界水力梯度小于按平均渗透系数计算的临界水力梯度, 对于理解渗透破坏是至关重要的, 对于流土是如此, 对于管涌更是如此。管涌型土的渗透系数随位置不同变化极大, 这是为什么管涌型土中管涌发生的临界水力梯度远小于流土型土中流土发生的临界水力梯度的重要原因之一。

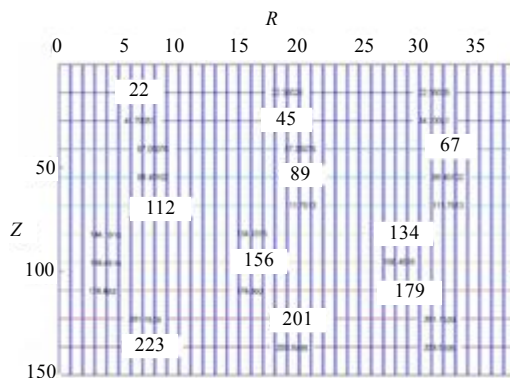


图 3 假设土体均匀情况下的水头分布

Fig.3 Water head distribution as the soil is uniform

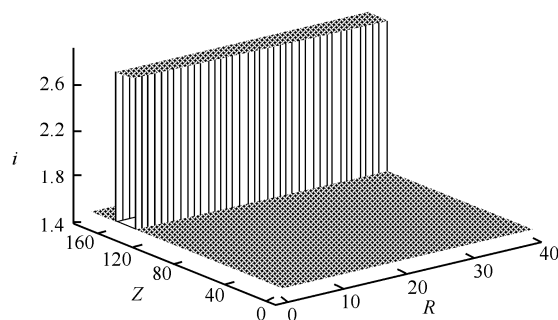


图 4 试验 1 当 $\chi = 2$ 时的水力梯度分布

Fig.4 Hydraulic gradient distribution when $\chi = 2$ in test 1

3.2 管涌机理分析

通过一个计算实例, 围绕不均匀的渗透系数和水力条件来对管涌机理做分析。待分析的实例如下: 在圆柱形区域内, 管涌型土受到一定的边界条件作用发生管涌。管涌型土由砾砂和中砂组成, 砾砂为土的主要骨架, 平均粒径为 5 mm, 中砂为主要可动颗粒, 平均粒径为 0.10 mm, 砂的比重为 2.6, 孔隙率为 0.3, 平均渗透系数为 0.45 cm/s。考察区域的半径 R 为 40 个单位, 深度 z 为 10 个单位。边界条件如下:

上底面边界条件:

$$u = 0, (z = 0) \quad (24)$$

下底面边界条件:

$$100 \frac{\partial u}{\partial z} + u = 25, (z = 10) \quad (25)$$

侧面边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0.01, \quad (\rho = 40) \quad (26)$$

式中 u 表示水头。其实管涌通道就是在细颗粒冲走后，由大颗粒构成的孔隙通道，这样该区域的渗透系数势必会增大，所以将通道设成强透水层是合理的，在实际操作中可令管涌通道的透水系数是砂层的若干倍^[11]。假设该区域的半径 r 为 2 个单位，深度为 10 个单位。为表述方便，称该区域为中心区域，而其余区域为外围区域。

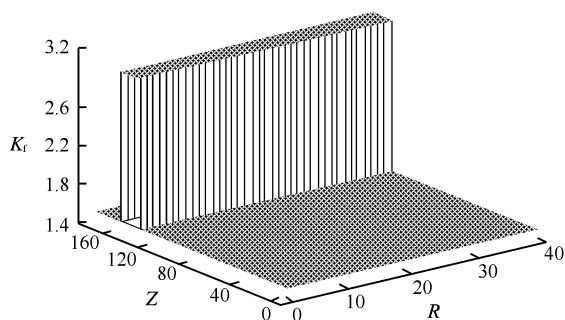


图 5 试验 1 当 $\chi = 2$ 时的破坏系数分布

Fig.5 Failure coefficient distribution when $\chi = 2$ in test 1

表 3 渗透系数差异增大到不同程度时的计算结果
Table 3 The results with increasing seepage coefficient variety

χ	中心区平	外围区平	中心区平	外围区平	整个区平
	均速度 / $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$	均速度 / $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$	均破坏 系数	均破坏 系数	均破坏 系数
1.0	0.100	0.100	0.95	0.94	0.22
1.2	0.116	0.100	1.08	0.94	0.22
1.5	0.145	0.102	1.36	0.96	0.23
2.0	0.180	0.102	1.75	0.97	0.23
3.0	0.279	0.102	2.60	0.97	0.23
5.0	0.480	0.103	4.31	0.97	0.23
10	0.931	0.103	8.68	0.97	0.23
30	2.89	0.103	27.1	0.97	0.23
100	9.68	0.103	91.6	0.97	0.23

现来考察该处渗透系数增大到不同程度时整个区域的水头分布和速度分布等。记 χ 为中心区域渗透系数与外围区域渗透系数之比。计算结果见表 3。图 6、图 7 给出了土体均匀和 $\chi = 2$ 时的典型计算结果。由于问题的对称性，这里也只给出了一半剖面解的结果。可以看到，随 χ 增大，外围区域的速度分布和破坏系数分布较均匀，变动很小，而中心区域的速度分布和破坏系数不断增大。整个区域的水力梯度几乎不变，在 0.22~0.23，这是由于假设边界

条件固定不变的缘故。在此条件下，其速度大小几乎相等，为 0.1 cm/s 左右。

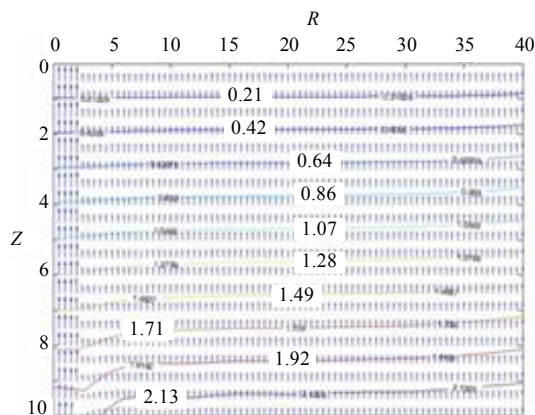


图 6 当 $\chi = 2$ 时整个区域的水头分布等值线和速度向量
Fig.6 Water head and velocity distribution when $\chi = 2$

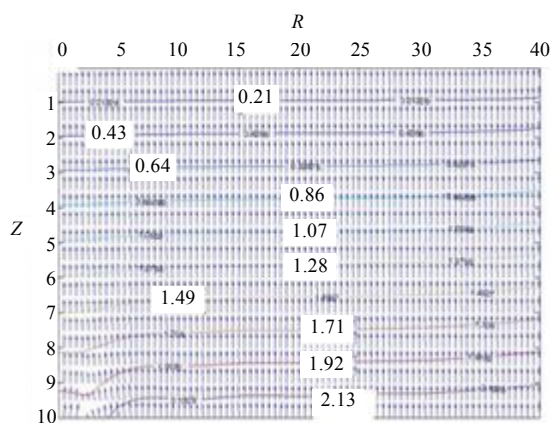


图 7 假设土体均匀时的水头分布等值线和速度向量
Fig.7 Water head and velocity distribution when the soil is uniform

分析结果认为，中心区域发生管涌后该处的部分可动颗粒被冲出，渗透系数变大，速度变大，破坏系数变大，于是更多可动颗粒被冲出，渗透系数变得更大，如此作用下去，直到土体破坏管涌结束。可见管涌是朝 χ 增大的方向发展的。管涌发展时， χ 增大，管涌发生区域的水流速度增大，流量增大，即该区域出现渗流集中现象，产生的通道称为管涌通道，或更一般的称为集中渗漏通道。

管涌发生后，管涌附近区域的部分可动颗粒向管涌区域迁移，然后被管涌区域的水流带出，其间存在一个平衡关系。这个现象较复杂，计算模型中未能体现这一点。管涌是比较复杂的现象，这里只是结合计算实例尝试对渗流集中现象进行解释，望给出一些有意义结论。

4 结 论

(1)首次提出柱坐标下 Laplace 方程在不同介质有限区域内用分离变量方法求解,给出了一定边界条件下圆柱形域内竖向向分层土的水头分布解答;并对其进行了实例分析,验证了解的正确性,认为不均匀土渗透破坏的临界水力梯度小于按平均渗透系数计算的临界水力梯度,按土层均匀假设来计算临界水力梯度,在工程上是偏于不安全的。

(2)水力梯度分布的不均匀,很大程度上是由于土体渗透系数分布不均匀引起的。二者综合的结果,使管涌在最薄弱的位置首先发生。管涌发生后,渗透系数变大,破坏系数变大,于是更多可动颗粒被冲出,土体渗透系数分布更不均,水力梯度分布随之更不均匀。土体渗透系数与水力梯度二者相互作用,直至管涌破坏,可见水土的相互作用贯穿于管涌发展的整个过程。

(3)对发展性管涌,管涌向着渗透系数差异增大的方向发展。管涌发展时,管涌区域的流速流量增大,出现集中渗流现象,并产生集中渗漏通道。本文尝试对管涌的复杂机理进行了引申阐述。

参 考 文 献

- [1] 殷建华. 土堤管涌区渗流的有限元模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(6): 679—686.
YING Jian-hua. Finite element simulation of seepage piping in earth dyke[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1998, 17(6): 679—686.
- [2] 张家发, 王满星, 丁金华. 典型条件下堤身堤基渗流规律分析[J]. 长江科学院院报, 2000, 17(5): 23—27.
ZHANG Jia-fa, WANG Man-xing, DING Jin-hua. Analysis of seepage field in levee and its foundation under typical conditions[J]. **Journal of Yangtze River Scientific Research Institute**, 2000, 17(5): 23—27.
- [3] 李守德, 张晓海, 刘志祥. 基坑开挖工程管涌发生过程的模拟[J]. 工程勘察, 2003, (2): 14—21.
LI Shou-de, ZHANG Xiao-hai, LIU Zhi-xiang. Simulation of piping erosion process in the excavation of foundation pit[J]. **Geotechnical Investigation & Surveying**, 2003, (2): 14—21.
- [4] Achmus, M.; Mansour, B.G.S. Comparing finite element and empirical analysis methods for the Assuit barrage apron[J]. **International Journal on Hydropower and Dams**, 2003, 10(3): 101—105.
- [5] 曹敦侣. 渗流管涌的随机模型[J]. 长江科学院院报, 1985, 12(10): 10—15.
CAO Dun-lv. Stochastic model of seepage piping[J]. **Journal of Yangtze River Scientific Research Institute**, 1985, 12(10): 10—15.
- [6] Sato, T.; Uno, T. Probabilistic approach to hydraulic fracturing in heterogeneous soil[J]. **Computational Methods in Subsurface Hydrology**, 1990: 463—468.
- [7] Foster, Mark; Fell, Robin; Spannagle, Matt. Method for piping[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2000, 37(5): 1 025—1 061.
- [8] 刘忠玉. 无黏性土中管涌的机理研究[博士学位论文D]. 兰州: 兰州大学, 2001.
- [9] 张我华, 余功栓, 蔡袁强. 堤与坝管涌发生的机理及人工智能预测与评定[J]. 浙江大学学报(工学版), 2004, (7): 902—908.
ZHANG Wo-hua, YU Gong-shuan, CAI Yuan-qiang. Mechanism and artificial intelligence method for prediction and judgment of piping occurring in embankment[J]. **Journal of Zhejiang University (Engineering Science)**, 2004, (7): 7 902—908.
- [10] Koenders M A, Sellmeijer J B. Mathematical model for piping[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1992, 118(6): 943—946.
- [11] 林志. 关于管涌的试验研究和理论分析[硕士学位论文D]. 上海: 同济大学, 2000.
- [12] Kalin M Hydraulic piping-theoretical and experiment findings[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1976, 14(1): 107—124.